

令和4年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数 学

融 合 学 域
先 導 学 類(理系傾斜)
観光デザイン学類(理系傾斜)
理 工 学 域
数 物 科 学 類
物 質 化 学 類
地 球 社 会 基 盤 学 類
生 命 理 工 学 類
理 工 3 学 類
医 薬 保 健 学 域
医 学 類
薬 学 類
医 薬 科 学 類
保 健 学 類(放射・検査)

(注 意)

- 1 問題紙は指示があるまで開かないこと。
- 2 問題紙は本文2ページであり、答案用紙は4枚である。
- 3 答えはすべて答案用紙の指定欄に記入し、網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 4 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 方程式  $z^4 + 4 = 0$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

(1) 複素数  $-4$  を極形式で表し、 $z^4 + 4 = 0$  を満たす複素数をすべて求めよ。

(2)  $|w|^2 = 3$  を満たす複素数  $w$  と、 $z^4 + 4 = 0$  を満たす複素数  $\alpha$  について、

$$|\alpha + iw|^2 + |\alpha - iw|^2$$

を求めよ。

(3)  $t$  を実数とする。複素数平面における円  $|z - t - 5i| = 5$  の内部（ただし、境界線を含まない）に、 $z^4 + 4 = 0$  を満たす複素数がちょうど 1 つ含まれるように、 $t$  の範囲を定めよ。

2  $k$  を正の実数とし、 $x > 0$  で定義された関数  $y = k(\log x)^2$  のグラフを  $C$  とする。 $y$  軸上に点  $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}e\right)$  をとる。ただし、 $e$  は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)  $C$  上の点  $(p, k(\log p)^2)$  における接線の方程式を求めよ。

(2) 点  $A$  を通って、 $C$  にちょうど 2 本の接線が引けることを示せ。

(3) 点  $A$  を通る  $C$  の 2 本の接線が垂直に交わるような  $k$  の値を求めよ。さらに、それぞれの接点の  $x$  座標  $p, q$  を求めよ。ただし、 $p < q$  とする。

(4) (3) で求めた  $k, p, q$  に対し、定積分

$$\int_p^q k(\log x)^2 dx$$

を求めよ。

- 3 実数  $p, q$  を係数とする 2 次方程式  $x^2 + px + q = 0$  が、実数解  $\alpha, \beta$  をもち、 $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$  を満たすとする。ただし、 $\alpha \leq \beta$  とする。このとき、

$$M = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)}$$

を  $q$  の式で表し、 $M$  のとりうる最大値および最小値と、そのときの  $\alpha, \beta$  の値を求めよ。

- 4 自然数  $n$  の正の約数全体の集合を  $A_n$  とし、 $A_n$  のすべての要素の逆数の 2 乗の和を  $s_n$  とする。例えば、

$$A_3 = \{1, 3\}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{3^2}, \quad A_4 = \{1, 2, 4\}, \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}$$

である。 $p$  と  $q$  は異なる素数とし、 $k$  と  $l$  は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $s_8, s_{12}$  の値を求めよ。
- (2)  $n = p^k$  について、 $A_n$  の要素の個数を求めよ。
- (3)  $n = p^k q^l$  について、 $s_n < \frac{3}{2}$  を示せ。