

数学 正解・解答例

【出題意図・採点の観点】

平成31年度入学者選抜学力検査（前期日程）における数学の出題に対する基本的な方針および採点の観点は以下の通りである。

出題形式は，高等学校における教育課程および受験生の履修状況を考慮し，従来通り，いわゆる文系，理系の2種類を用意した。文系，理系ともに解答方式は，受験生の数学の理解度・到達度・表現力がより適正に評価できる記述式とした。出題に当たっては，高等学校の数学の教科書の内容に準拠し，主に以下のような点が問えるよう心がけた。

- （１）標準的な問題を，基本的な概念や原理・法則を単に暗記することなく正確に理解して解答できるかどうか。
- （２）基本的な問題と，その発展問題を解答させることにより，図形的な考察を含め総合的に理解し，かつ正確に計算できるかどうか，また理論的に考えて記述・表現ができるかどうか。

さらに採点に関しても上記の観点を重視して行った。

【解答例（理系）】

解答が具体的に表されるものについてはそれを示したが、他の表現もあり得る。それ以外については、解答の方針を一つ例示した。なお、採点においては、解答のプロセスや記述の論理性も重視した。

1 (1) $0 < k < 1, |\alpha| = 1$

(2) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ 等の表記も可} \right)$

(3) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{12}\pi, \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < k < \frac{1}{2}$

(4) $0 \leq |1 - \alpha^5| < 1$

2 (1) $y = \sqrt{x} - 4$ の第2次導関数 $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ の値が負より、 C_1 は上に凸である。

(2) 点 $P = (x_1, y_1)$ と点 $Q = (x_2, y_2)$ の座標は、仮定より $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = -2$ を満たすことから P が C_1 上にあることと Q が C_2 上にあることは同値になる。

(3) $A = (1, -3), B = (0, -1)$

(4) $X_1 X_2 \geq AB = \sqrt{5}$ より求める最小値は $\sqrt{5}$ である。

3 曲線 C_1 は $y = -x \pm \sqrt{1-x^2}$ のグラフで与えられ、曲線 C_2 は C_1 と x 軸に関して対称より $y = x \pm \sqrt{1-x^2}$ のグラフで与えられる。これから C_1 と C_2 で囲まれる2つの図形の共通部分の概形が描かれ、求める面積 S は、

$$S = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-x + \sqrt{1-x^2}) dx = \frac{\pi}{2}$$

である。

4

(1) $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

(2) A に属する整数の個数は、 $p^n - p^{n-1}$ であり、 A に属する整数の和は $\frac{1}{2}(p^n - p^{n-1})p^n$ となる。

(3) A の要素 k に対して、 $kx + p^ny = 1$ を満たす整数 x, y をとり、 x を p^n で割った余りを ℓ とすると、 $\ell \in A$ で $k\ell - 1$ は p^n の倍数となる。

(4) $k \in A$ に対して (3) で得た整数を ℓ_k とする。このとき、 A に属するすべての整数 k についての $\frac{1}{k}$ の和 S は、 $k\ell_k = 1 + p^nx_k$ (x_k は整数) より、 A に属するすべての整数 k についての $\ell_k - p^n\frac{x_k}{k}$ の和と等しい。さらに $\frac{x_k}{k}$ の和を $\frac{b}{a}$ (既約分数) とすると、 $S = \frac{p^n(a(p^n - p^{n-1})/2 - b)}{p^n - p^{n-1}}$ と表すことができる。 a は p と素であり、 p が奇数ゆえ $\frac{p^n - p^{n-1}}{2}$ は整数であることに注意して、右辺は既約分数で、その分子は p^n の倍数であることが示される。